УДК 519.6

АЛГОРИТМ И ФОРМУЛЫ СИМПСОНА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ И В ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Голубева О.В., Ехилевский С.Г., Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф.
Полоцкий государственный университет

Аннотация: Аналитически показано, что составная формула Симпсона на отрезке имеет четвёртый порядок аппрокимации. Получены алгоритмы и прграммы для вычисления определённых двойных на прямоугольнике(ковёр Симпсона) и тройных(параллелепипед Симпсона) интегралов. Численно показано, что предлагаемые шаблоны весовых коэффициентов и формулы, используемые в алгоритмах, обеспечивают четвёртый порядок аппроксимации.

Ключевые слова: интегральная квадратурная формула, шаблон весовых коэффициентов, прямоугольник Симпсона, параллелепипед Симпсона.

THE ALGORITHM AND FORMULAS OF SIMPSON ON RECTANGLE AND IN BOX

Golubeva O.V., Ehilevskiy S.G., Pastuhov YU.F., Pastuhov D.F.
Polockiy state university

The Abstract: is Analytically shown that component formula Simpsona on length has a fourth order to inaccuracy. They Are Received algorithms and is written program for calculation determined double on rectangle(the rug of Simpson) and triple(the parallelepiped of Simpson) integral. Ekspeprimentalino is shown that proposed patterns весовых factor and formulas, used in algorithm provide the fourth order to aproximations.

The Keywords: integral formula, weight factor pattern, rectangle of Simpson,parallelepiped of Simpson.

Введение

Двойные и тройные определённые интегралы довольно часто используют при вычислении площадей плских фигур и объёмов тел, массы тел, статических моментов, моментов инерции тел относительно осей и относительно центра масс[1]. Можно сказать, что нет ни одной технической дисциплины, где бы не определялись величины через двойные и тройные интегралы. Не все интегралы даже от элементарных функций могут быть выражены через элементарные функции,т.е. интегралы получают численно. Однако, важно использовать квадратурные формулы при вычислении интегралов с большим порядком аппроксимации . Как правило, можно встетить разностные формулы с четвёртым порядком точности относительно шага сетки, например, разностная схема Рунге – Кутты четвёртого порядка для решения ОДУ. В данной работе показано, что составная формула Симпсона на отрезке имеет четвёртый порядок аппроксимации. Приведен алгоритм для определённых двойных на прямоугольнике(ковёр Симпсона) и тройных интегралов(параллелепипед Симпсона) с четвёртым порядком аппрокимации для непрерывных функций без особенностей.

1.Составная формула Симпсона для отрезка, порядок аппроксимации.

Получим формулу Симпсона (по 3 узлам $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ $n = 3$),используя канонический отрезок[-1,1].

$$\int_{-1}^{1} f(z)dz = C_1 f(-1) + C_2 f(0) + C_3 f(1)$$

$$f(z) \equiv 1, \int_{-1}^{1} f(z)dz = \int_{-1}^{1} dz = 2 = C_1 + C_2 + C_3$$

$$f(z) = z, \int_{-1}^{1} f(z)dz = \int_{-1}^{1} zdz = 0 = -1 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + 1 \cdot C_3 \Leftrightarrow C_3 = C_1$$

$$f(z) = z^2, \int_{-1}^{1} f(z)dz = \int_{-1}^{1} z^2 dz = \frac{2}{3} = 1 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + 1 \cdot C_3 \Leftrightarrow C_3 = C_1 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{4}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} f(z)dz = \frac{1}{3}\big(f(-1) + 4f(0) + f(1)\big) \Leftrightarrow \int_{a}^{b} f(x)dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)\frac{\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}{3} =$$

$$= \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \quad (1)$$

В частности, для $f(z) \equiv 1, \int\limits_{-1}^{1} f(z)dz = 2$ - получаем длину канонического отрезка.

Шаблон весовых коэффициентов для составной формулы Симпсона:

$\dfrac{(1,4,2,4,2,\ldots,2,4,1)}{3}$ (используется чётное число интервалов и равномерный шаг сетки $n = 2k$).

Получаем составную формулу Симпсона из (1):

$$I_1 = \int\limits_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{k} f(a + h(2i-1)) + 2\sum_{i=1}^{k-1} f(a + h(2i)) + f(b) \right) =$$

$$= \frac{(b-a)}{3n}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{k} f(a + h(2i-1)) + 2\sum_{i=1}^{k-1} f(a + h(2i)) + f(b) \right) \qquad (2)$$

Оценим погрешность формулы(1), учтём $b - a = 2h$:

$$\int\limits_{c-h}^{c+h} f(x)dx = 2hf(c) + \frac{h^3}{3} f''(c) + \frac{(b-a)^5}{1920} f^{(4)}(c) = 2hf(c) + \frac{h^3}{3} f''(c) + O(h^5)$$

$\dfrac{f(c-h) + f(c+h) - 2f(c)}{h^2} = f''(c) + \dfrac{h^2}{12} f^{(4)}(c) + O(h^4)$,из последних двух формул получим:

$$\int\limits_{c-h}^{c+h} f(x)dx = 2hf(c) + \frac{h^3}{3}\left(\frac{f(c-h) + f(c+h) - 2f(c)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(c) + O(h^4) \right) + \frac{h^5}{60} f^{(4)}(c) + O(h^5) =$$

$$\int\limits_{c-h}^{c+h} f(x)dx = \frac{h}{3}\big(f(c-h) + f(c+h) + 4f(c) \big) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c) + o(h^5)$$

$$R(f) \equiv \int\limits_a^b f(x)dx - \frac{h}{3}\big(f(c-h) + f(c+h) + 4f(c) \big) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c) + o(h^5)$$

Погрешность составной формулы($k = \dfrac{n}{2} = \dfrac{b-a}{2h}$):

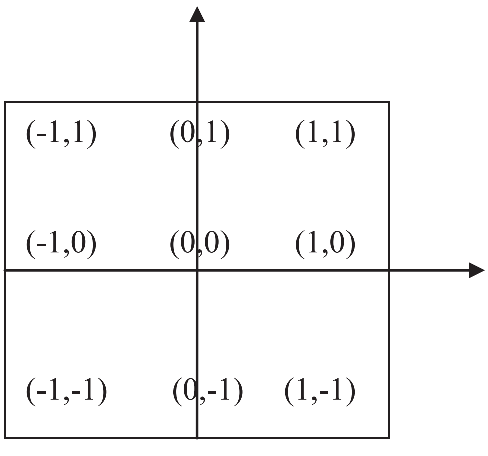
$$|R(f)| \le k\left(\frac{h^5}{90} \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right| + o(h^5) \right) = \frac{b-a}{2h}\left(\frac{h^5}{90} \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right| + o(h^5) \right) = h^4 \left(\frac{b-a}{180} \right) \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right| + o(h^4)$$

Т.е. порядок аппроксимации составной одномерной формулы Симпсона равен 4.

2.Построение алгоритма для двухмерной формулы Симпсона

Построим квадратурную формулу максимальной точности на 9 узлах, как показано на рис.1 для вычисления двойного интеграла, используя канонический квадрат со стороной равной 2 с центром в начале координат.

Рис.1



$$I_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy = C_0 f(0{,}0) + C_1\big(f(1{,}0) + f(-1{,}0) + f(0{,}1) + f(0,-1)\big) + \tag{3}$$
$$+ C_2(f(1{,}1) + f(1,-1) + f(-1{,}1) + f(-1,-1))$$

В квадратурной интегральной формуле (3) весовые коэффициенты в центральных точках рёбер C_1, а также все веса в угловых точках квадрата C_2 рис.1 имеют равные значения. Действительно, при инверсии системы координат (замены координатных осей $x \to y, y \to x$) значение интеграла в (3) не может измениться в силу симметрии области интегрирования. Отсюда следует равенство упомянутых выше весовых коэффициентов. Потребуем равенства нулю невязки в формуле (3) для всех мономов с переменными x, y максимальной степени,начиная с нулевой:

1) $f(x,y) \equiv 1, I_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dxdy = 4 = C_0 + 4C_1 + 4C_2$

2) $f(x,y) = x, I_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xdxdy = 2\int_{-1}^{1} xdx = x^2\Big|_{-1}^{1} = 0 = C_1\big(-1+1+0+0\big) + C_2\big(1+1-1-1\big) = 0$

Второе уравнение является тривиальным и не может быть использовано в дальнейшем. Аналогично, в силу симметрии тривиально соотношение для функции $f(x,y) = y$.

3) $f(x,y) = x^2, I_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 dxdy = 2\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3} = C_1\big(1+1+0+0\big) + C_2\big(1+1+1+1\big)$

$\frac{4}{3} = 2C_1 + 4C_2$. В силу симметрии то же уравнение мы получим для функции $f(x,y) = y^2$.

4) $f(x,y) = xy, I_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xydxdy = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} \frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0 = C_2\big(1-1-1+1\big) = 0$

Тривиальное тождество.

5) $f(x,y) = x^3, I_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^3 dxdy = 2\int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{x^4}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0 = C_1\big(-1+1+0+0\big) + C_2\big(1+1-1-1\big) = 0$.

Тривиальное тождество. Тривиальное оно также для $f(x,y) = y^3$.

6) $f(x,y) = xy^2, I_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xy^2 dxdy = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} \frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 0 = C_2\big(1+1-1-1\big) = 0$.

Тривиальное тожднество. Тривиально оно также для функции $f(x,y) = yx^2$.

7) $f(x,y) = x^4, I_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^4 dxdy = \frac{2x5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{5} = C_1(1+1+0+0) + C_2\big(1+1+1+1\big)$

$\frac{4}{5} = 2C_1 + 4C_2$. Такое же уравнение мы получим для $f(x,y) = y^4$ в силу симметрии.

Последнее уравнение противоречиво с 3). В данном случае мы имеем моном более старшей степени (4 –ой)и потому отбрасываем именно 7) и оставляем 3) с мономом 2 – ой степени[2].

7) $f(x,y) = x^2y^2, I_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2y^2 dxdy = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} \frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{9} = C_2\big(1+1+1+1\big) = 4C_2$.

Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 4 = C_0 + 4C_1 + 4C_2 \\ \frac{4}{3} = 2C_1 + 4C_2 \\ \frac{4}{9} = 4C_2 \end{cases} \quad \text{Откуда } C_2 = \frac{1}{9}, C_1 = \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{9}\right)/2 = \frac{4}{9}, C_0 = 4 - \frac{20}{9} = \frac{16}{9}.$$

В итоге получаем квадратурную формулу;

$$I_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy = \frac{16}{9} f(0,0) + \frac{1}{9}\big(f(1,0) + f(-1,0) + f(0,1) + f(0,-1)\big) +$$
$$+\frac{4}{9}(f(1,1) + f(1,-1) + f(-1,1) + f(-1,-1)) \qquad (4)$$

В частности, при $f(x,y) \equiv 1, I_2 = 4$ - получаем площадь канонического прямоугольника.
Для составной формулы разделим стороны прямоуголника с координатами $a \le x \le b, c \le y \le d$ на чётное число частей $n = 2k, h_1 = (b-a)/n, h_2 = (d-c)/n$ - шаги полученной координатной сетки.

Мы можем покрыть исходный прямоугольник k^2 каноническими прямоугольниками, используя рис.1 и формулу (4), получим шаблон весовых коэффициентов для составной двумерной формулы Симпсона(приведенный шаблон соответствует $k = 3$):

Шаблон 1(значения коэффициентов $C_{i,j}$)

1	4	2	4	2	4	1
4	16	8	16	8	16	4
2	8	4	8	4	8	2
4	16	8	16	8	16	4
2	8	4	8	4	8	2
4	16	8	16	8	16	4
1	4	2	4	2	4	1

$$I_2 = \frac{h_1}{3}\frac{h_2}{3}\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} C_{i,j} f\left(a + ih_1, c + jh_2\right)\right) \qquad (5)$$

Заметим, что весовые коэффициенты каждой строки определяется первой строкой,умноженной на число из крайнего левого столбца шаблона 1 $C_j^{left}, j = \overline{0,n}$ - алгоритм для I_2 ($C_{i,0} \equiv C_i$):

1)если $j = 0$ или $j = n$, $\left(C_{i,j} = C_i \forall i = \overline{0,n}\right)$

2)если $j \equiv 1 \mod 2$, $\left(C_{i,j} = 4C_i \forall i = \overline{0,n}\right)$

3) если $j \equiv 0 \mod 2, 1 \le j \le n-1, , mas[j] = 2I_1[j]$ $\left(C_{i,j} = 2C_i \forall i = \overline{0,n}\right)$

Рассмотрим **пример 1**:
Вычислить двойной интеграл на квадрате $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ для функции $f(x,y) = x^3 y^4$.
Точное решение есть:

$$\int_0^1\int_0^1 x^3 y^4 dxdy = \frac{x^4}{4}\frac{y^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{20} = 0.05$$

Программа для двойного интеграла(формулы Симпсона на прямоугольнике – ковра Симпсона) с использованием формулы(5) и алгоритма (6) (на языке с++)

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
double f(double x, double y);
int const n=100,k=n/2;
 main()
{
int s,j;
        double a,b,c,d,h1,h2,bb[n+1],x,y;
        double sum,sum1,bac1,bac,delta;
        a=0.0;
        c=a;
        b=1.0;
        d=b;
        h1=(b-a)/double(n);
        h2=(d-c)/double(n);
        for(j=0;j<=n;j++)
        {
```

```
            bac1=0.0;
            y=c+h2*double(j);
            sum=0.0;
            sum1=0.0;
            for(s=1;s<=k;s++)
            {
            x=a+h1*double(2*s-1);

            sum=sum+f(x,y);
            }
            sum=sum*4.0;
                        for(s=1;s<=k-1;s++)
{
x=a+h1*double(2*s);
sum1=sum1+f(x,y);
}
sum1=sum1*2.0  ;
bac1=(sum          +sum1+f(a,y)+f(b,y))*h1*h2/9.0;
if( (j==n) || (j==0))
{
bb[j]      = bac1;
}
else if(j%2==1)
{
bb[j]      = 4.0*bac1;
}
else if(j>0 && j<n && j%2==0)
{
            bb[j]=2.0*bac1;
}
}
bac=0.0;
for(j=0;j<=n;j++)
{
            bac=bac+bb[j];
}
delta=1.0/20.0-bac;
printf("int 2 =%.16lf, exact=%.16lf delta=%.16lf\n",bac, 1.0/20.0,delta);
}
double f(double x, double y)
{
            return x*x*x*y*y*y*y;
}
```

При $n = 100$ программа возвращает

$$int2 = 0.0500000003333333, axact = 0.0500000000000000, delta_1 = -0.0000000003333333$$

При $n = 200$ программа возвращает

$$int2 = 0.0500000000208333, axact = 0.0500000000000000, delta_2 = -0.0000000000208333$$

Откуда получим порядок аппроксимации двухмерной формулы Симпсона:

$$\frac{|delta_1|}{|delta_2|} = \frac{0.0000000003333333}{0.0000000000208333} = 16.0000024 \approx 2^4$$

То есть порядок аппрроксимации двумерной формулы Симпона также равен 4.

3.Построение алгоритма для трёхмерной формулы Симпсона

Учитывая предыдущий опыт построения алгоритма I_2 по I_1, получим алгоритм для I_3. используя значение I_2. Объёмный(тройной) интеграл Симпсона:

$$I_3 = \frac{h_1}{3}\frac{h_2}{3}\frac{h_3}{3}\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{s=0}^{n} C_{i,j,s} f\left(a + ih_1, c + jh_2, e + sh_3\right)\right), h_3 = (f - e)/n \qquad (6)$$

Теперь мы перечислим шаблоны весовых коэффициентов послойно, аналогично тому, как археологи открывают поочерёдно культурные слои древнего города $\left(C_{i,j,0} \equiv C_{i,j}\right)$:

1)если $s = 0$ или $s = n$, $\left(C_{i,j,s} = C_{i,j} \forall i, j = \overline{0,n}\right)$ используем шаблон 1.

2) если $s \equiv 1 \bmod 2$, $\left(C_{i,j,s} = 4C_{i,j} \forall i, j = \overline{0,n}\right)$используем шаблон 2:

Шаблон 2(значения коэффициентов $C_{i,j,s}$)

4	16	8	16	8	16	4
16	64	32	64	32	64	16
8	32	16	32	16	32	8
16	64	32	64	32	64	16
8	32	16	32	16	32	8
16	64	32	64	32	64	16
4	16	8	16	8	16	4

3) если $s \equiv 0 \bmod 2, 1 \le s \le n-1$, $\left(C_{i,j,s} = 2C_{i,j} \forall i, j = \overline{0,n}\right)$ используем шаблон 3:

Шаблон 3(значения коэффициентов $C_{i,j,s}$)

2	8	4	8	4	8	2
8	32	16	32	16	32	8
4	16	8	16	8	16	4
8	32	16	32	16	32	8
4	16	8	16	8	16	4
8	32	16	32	16	32	8
2	8	4	8	4	8	2

Последовательность алгоритма можно записать в виде простой диаграммы($k = 3$)

$$Ш1 - Ш2 - Ш3 - Ш2 - Ш3 - Ш2 - Ш1$$

Рассмотрим **пример 2**:

Вычислить тройной интеграл на параллепитеде $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 2$ для функции $f(x, y, z) = x^3 y^4 z^5$. Точное решение есть:

$$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 x^3 y^4 z^5 dxdydz = \frac{x^4}{4}\frac{y^5}{5}\frac{z^6}{6}\Bigg|_0^2 = \frac{2^{15}}{2^3 * 15} = \frac{2^{12}}{15} = 273.06(6)$$

Программа для тройного интеграла (формулы Симпсона на параллелепитеде) с использованием формулы(7) и алгоритма (8)(на языке с++)

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
double f(double x, double y, double z);
int const n=200,k=n/2;
 main()
{
int s,j,j0,j1;
        double a,b,c,d,e,f1,h1,h2,h3,aa[n+1],bb[n+1],x,y,z;
        double sum,sum1,bac1,bac,bac2,delta;
        a=0.0;
        c=a;
        e=a;
        b=2.0;
        d=b;
        f1=b;
        h1=(b-a)/double(n);
        h2=(d-c)/double(n);
        h3=(f1-e)/double(n);
        for(j1=0;j1<=n;j1++)
        {
        z=e+h3*double(j1);
        for(j=0;j<=n;j++)
        {
        bac1=0.0;
        y=c+h2*double(j);
        sum=0.0;
```

```
            sum1=0.0;
            for(s=1;s<=k;s++)
            {
            x=a+h1*double(2*s-1);
            sum=sum+f(x,y,z);
            }
            sum=sum*4.0;
                        for(s=1;s<=k-1;s++)
{
x=a+h1*double(2*s);
sum1=sum1+f(x,y,z);
}
sum1=sum1*2.0  ;
bac1=(sum          +sum1+f(a,y,z)+f(b,y,z))*h1*h2/9.0;
if( j==n || j==0)
{
bb[j]      = bac1;
}
else if(j%2==1)
{
bb[j]      = 4.0*bac1;
}
else if(j>0 && j<n && j%2==0)
{
            bb[j]=2.0*bac1;
}
}
bac=0.0;
for(j0=0;j0<=n;j0++)
{
            bac=bac+bb[j0];
}
if(j1==0 || j1==n)
{
aa[j1]=bac;
}
else if(j1%2==1)
{
            aa[j1]=bac*4.0;
}
else if(j1%2==0 && j1>0  && j1<n)
{
aa[j1]=bac*2.0;
}
}
bac2=0.0;
for(s=0;s<=n;s++)
{
bac2=bac2+aa[s];
}
bac2=bac2*h3/3.0;
delta=1024.0*4.0/15.0-bac2;
printf("int 3 =%.16lf, exact=%.16lf delta=%.16lf\n",bac2, 1024.0*4.0/15.0,delta);
}
double f(double x, double y,double z)
{
            return x*x*x*y*y*y*y*z*z*z*z*z;
}
```

При $n = 100$ программа возвращает

$int3 = 273.0666739484445, axact = 273.0666666666663$

$delta_1 = -0.0000072817778687$

При $n = 200$ программа возвращает

$$int3 = 273.0666671217778, axact = 273.0666666666663$$

$$delta_2 = -0.0000004551111487$$

Откуда получим порядок аппроксимации трёххмерной формулы Симпсона:

$$\frac{|delta_1|}{|delta_2|} = \frac{0.000007281777.9}{0.000000455111.1} = 16.00000007 \approx 2^4$$

То есть порядок аппрроксимации трёхмерной формулы Симпона также равен 4.

Выводы

1) Аналитически показано, что составная интегральная квадратурная формула Симпсона имеет четвёртый порядок аппроксимации.
2) Получена формула Симпсона на каноническом квадрате и составная формула на прямоугольнике.
3) Приведен алгоритм для двойного определённого интеграла на прямоугольнике(ковре Симпсона) для непрерывных функций без особенностей.
4) Приведен алгоритм для тройного определённого интеграла на параллепипеде для непрерывных функций без особенностей.
5) Численно показано, что оба алгоритма имеют четвёртый порядок аппроксимации.

Литература

1)Математический анализ в вопрросах изадачах В.Ф.Бутузов, Н.Ч.Крутицкая, Г.Н.Медведев, А.А.Шишкин; Под редакцией В.Ф.Бутузова - 4-е изд., исправ. – М.: Физико-математическая литература, 2001.- 480 с.

2)Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. Численные методы. – 7 – е изд.: БИНОМ. Лаборатория знаний,2011. – 636 с. – (Классический университетский учебник).